

五軸工具機旋轉軸組裝誤差基於非線性方程式擬合方法之 Digital Twins 精度誤差模擬與補償系統

本文在於建立一個數學模型與人機介面，以開發一套五軸工具機的數位雙生 (Digital Twin) 同動誤差模擬與分析系統。五軸精度誤差檢測通常參照 ISO 10791-6 的同動路徑，本研究利用機器學習的非線性回歸方法，深入探討工具機在旋轉軸上的補償參數，以及它們與最終同動路徑誤差之間的關聯性，機器學習被應用於尋找這些關聯性和參數之間的非線性關係。模型可以在驗證過程中自動調整補償參數，以實現更優化的同動精度，使系統能夠更迅速地適應不同工具機型號的誤差補償，識別影響五軸工具機同動誤差的關鍵參數，並通過誤差補正，提高五軸工具機的同動精度。

■ 馮郁展、黃亮傑、覺文郁

關鍵詞：靜態誤差、非接觸式光學量測、非線性方程式擬合、R-Test

一、研究背景

目前國內外對五軸工具機進行補償的方式非常多，使用之量測儀器如 ball-bar、IBS R-test、雷射干涉儀等等，誤差數學模型建立的方式也琳瑯滿目，像是齊次座標轉換 HTM 透過堆疊工具機機構練的方式，將各軸向誤差堆疊形成一座標轉換矩陣，包含之誤差可達 43 項。但要把 43 項誤差全部解析現今是有困難的，因此只能透過分析誤差敏感度，來找出對工具機誤差影響較大的誤差項來進行補償，如何利用有限的誤差項來降低工具機誤差在數學上是一大難題。

二、研究動機與目的

機台補償值需要透過外部儀器進行量測，旋轉軸則根據 ISO 10791-6 進行量測，有使用 Ball Bar (Tsumi, 2003)，或是 IBS R-test(Józwik, 2018)，進行三軸同動或五軸

同動量測。誤差數學建模大多採用齊次座標轉換 (Homogeneous transformation matrix) 來計算誤差 (Jiang, 2015)，以機構練堆疊刀尖點到工件座標之相對座標，並以一個 4×4 的矩陣來描述刀尖點與工件的運動，如上述要把所有的誤差項全部解析是有困難的。

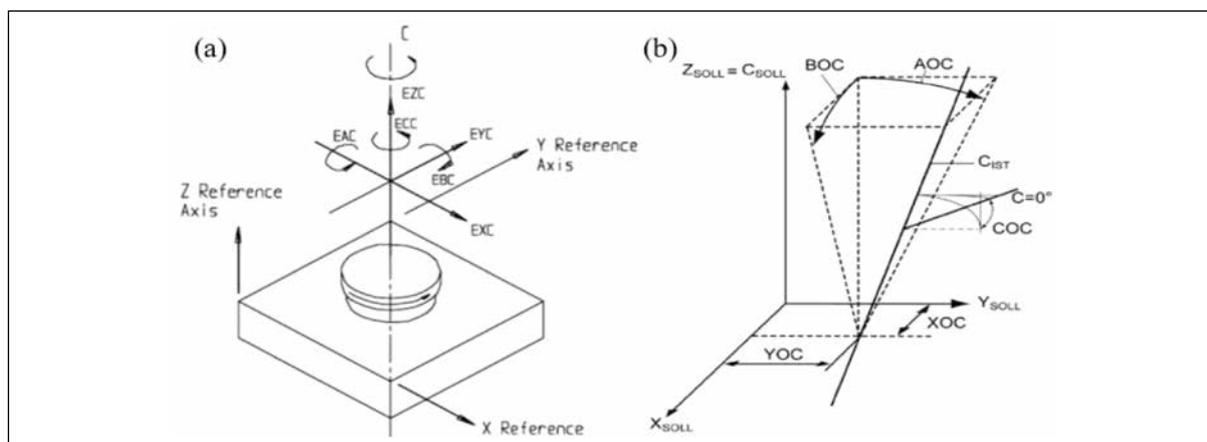
使用量測儀器不同於上述一般市售儀器，採用 Jywe 團隊開發之 Laser R-test(Jywe, 2012)，與市售儀器不同之處在於其量測為非接觸式，可避免掉接觸式量測帶來的誤差，且架設容易，並提出旋轉軸誤差模型全新的計算方式，使用機器學習多非線性方程式回歸擬合方法對量測路徑的誤差曲線進行擬合的計算方法，可以自動調整補償參數，有效的降低五軸同動誤差，改善工具機的加工誤差，增加工件精度。並建立一套人機介面來模擬誤差於空間中的軌跡，讓誤差可視化。

文獻回顧

一、工具機誤差種類

根據 ISO 230-1 與 ISO 230-7 五軸機誤差種類分為線性軸誤差 (ISO 230-1) 以及旋轉軸誤差 (ISO 230-7)，旋轉軸如 A、C 軸，旋轉軸運動時會產生六個方向的自由度誤

差，如 C 軸旋轉時，X、Y、Z 方向的誤差 (EXC、EYC、EZC)，組裝旋轉軸時元件之間產生的五個自由度誤差，如 C 軸往 X、Y 方向之誤差 (XOC、YOC)，以及往 A、B、C 方向之誤差 (COC、BOC、AOC)，故兩旋轉軸共二十二項誤差，如下圖一。



圖一 旋轉軸誤差 (ISO 230-7) (a) 元件誤差 (b) 位置誤差

二、誤差量測與分析

五軸誤差量測又分為直接量測以及間接量測，直接量測指的是針對單項誤差進行量測 (Schwenke, 2008)，利用像是雷射干涉儀、角度規、千分錶等等的儀器，比如線性軸定位 (EXX、EYY、EZZ 等) 利用雷射干涉儀，直接量測可以將不同誤差一個一個量測，可以有效分離出各項誤差，缺點是一項誤差就需量測一次，在效率上非常慢。間接量測則是針對刀尖點運動來分析是哪些誤差源疊加導致 (Ibaraki, 2012)，在單次儀器架設量測行程就可檢測多項誤差，並利用上述數學模型之逆向運動解出多項誤差，為現今最具效率的檢測方式。使用儀器像是 Double Ball-Bar、雷射追蹤儀、Touch-Trigger Probe 探針。

根據 ISO 230-4 透過循圓測試 (ISO 230-

4) 來量測，R-Test 循圓測試是利用三位移傳感器量測附於主軸的精密球體，其相對應的量測儀器有 IBS R-Test、3D Probe、Laser R-Test 等等接觸式與非接觸式儀器，本論文將使用儀器為 LRT 進行量測，為非接觸式光學感測儀器。

量測原理與系統架構

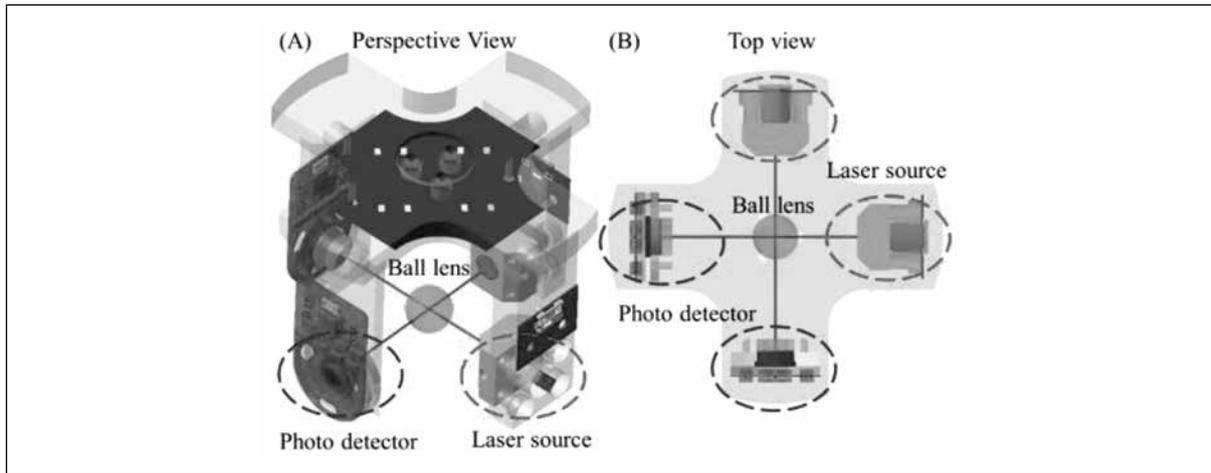
一、量測儀器原理介紹 LRT

Laser R-test 由兩大模組組成：1. 光學式感測頭，由兩組雷射光源、兩個光電探測器、一個放大器、一個 A/D 轉換器和 Wifi 無線接口組成。2. 標準透鏡球桿，由精密球透鏡 (直徑：5mm)、球桿、支架組成。LRT 架構圖如圖二 (Tran, 2021)。

LRT 具有以下優點：非接觸式測量，無磨損問題、分辨率高、配置簡單、安裝方

便，適用於 A、B、C 型機台甚至是車銑複合機的五軸同步量測。LRT 的設置是將感測頭和標準球透鏡分別安裝在待測機台的主軸與工作台上，透過雷射端射入標準玻璃球，由接收端接收訊號，分析其訊號，並轉為標準球位移量，得量測機台之刀尖點偏移量。

標準透鏡球桿與光學式感測頭的架設如圖二。測量原理不需要校準測量裝置和轉台之間的同心度，儀器硬件設置完成後，將 ISO 規範的測量路徑輸入控制器，便可根據量測路徑量測出該軸向之誤差。



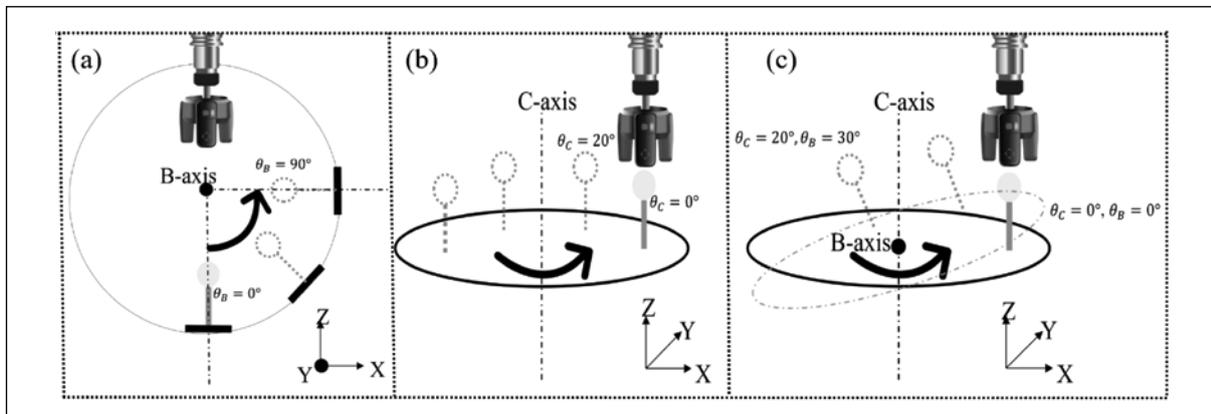
圖二 LRT 架構示意圖 (Tran, 2021) (a)LRT 透視圖 (b)LRT 上視圖

二、量測路徑規劃

本論文將以 TypeB 機型軸向為 BC 軸之五軸工具機作為實驗目標，路徑規劃將以三種路徑並以靜態方式量測進行實驗，根據 (ISO 10791-6) 分別為 B 軸 K1 路徑，C 軸 K2 路徑，以及 BC 同動的 K4 路徑。

B 軸路徑如圖三 (a)，量測範圍從 0 度

至 90 度，每 10 度量測一次，C 軸路徑如圖三 (b)，量測範圍從 0 度至 360 度，每 20 度量測一次，BC 同動路徑如圖三 (c)，則是根據上述量測角度 BC 軸搭配，例如 C 軸 20 度 B 軸則是 10 度，C 軸 40 度時 B 軸則是 20 度，依此類推至 C 軸 180 度 B 軸 90 度時，B 軸再往回遞減。



圖三 LRT 量測路徑規劃 (a) B 軸 K1 (b) C 軸 K2 (c) BC 同動 K4

誤差模型建立與驗證

一、數學模型

(一) 旋轉軸中心誤差

符號說明如表一，C 或 B 軸安裝時，起始點 P，如式 (1)，軸線往 X/Y 方向偏移，B 軸往 X/Z 方向偏移，也就是所謂的 XOC、YOC、XOB、ZOB，放入 3×1 矩陣，根據工具機補償位置定義，XOC 補償值是從 XOB 往上計算，故 XOC 值須加上 XOB，如式 (2)，將 C 軸的旋轉中心參數放入一個 3×1 矩陣 Q。L 為刀長，B 軸 Z 方向的偏移量需與刀長方向相反，故須加上刀長量，如式 (3)，將 B 軸的旋轉中心參數放入一個 3×1 矩陣 S。

$$P = \begin{bmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$Q = \begin{bmatrix} O_{xc} + O_{xb} \\ O_{yc} \\ O_{zc} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$S = \begin{bmatrix} O_{xb} \\ 0 \\ O_{zb} + L \end{bmatrix} \quad (3)$$

透過旋轉矩陣進行旋轉，式 (4) 為對 C 軸旋轉的旋轉矩陣，式 (5) 為對 B 軸旋轉的旋轉矩陣。 $(\theta_c、\theta_b$ 為 C、B 軸旋轉角度)

$$C(\theta_c) = \begin{bmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c & 0 \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\theta_c = 0 \sim 360^\circ) \quad (4)$$

$$B(\theta_b) = \begin{bmatrix} \cos \theta_b & 0 & -\sin \theta_b \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_b & 0 & \cos \theta_b \end{bmatrix} \quad (\theta_b = 0 \sim 90^\circ) \quad (5)$$

起始點 P 對式 (1)~(5) 運算得出有誤差之座標 P_{error} ，P 點先對 C 軸進行旋轉後再對 A 軸進行旋轉，P 扣掉 Q 對其旋轉中心進行偏移後乘上 C 進行旋轉，再加上 Q 偏移回原座標，B 軸亦同，對 C 軸旋轉完後，扣

掉 S 對其旋轉中心進行偏移後，乘上 B 矩陣，再加上 S 偏移回原坐標系，如式 (6)，得 P_{error} 為 B 軸或 C 軸在各角度具有誤差之座標， $P_{noerror}$ 為無誤差之座標，如式 (7)， P_{error} 與 $P_{noerror}$ 相減可得於 BC 軸各角度具有旋轉中心誤差之 XYZ 誤差量，如式 (8)。

$$P_{error} = \begin{bmatrix} X_v \\ Y_v \\ Z_v \end{bmatrix} = B \times ((C \times (P - Q) + (Q)) - S) + S \quad (6)$$

$$P_{noerror} = \begin{bmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{bmatrix} = B \times (C \times P) \quad (7)$$

$$Error = \begin{bmatrix} X_e \\ Y_e \\ Z_e \end{bmatrix} = P_{error} - P_{noerror} \quad (8)$$

(二) 旋轉軸偏擺誤差

旋轉軸安裝時，軸線出現角度的偏移，如 C 軸軸線繞的 X、Y 軸偏擺，也就是所謂的 AOC、BOC 誤差，B 軸繞 X、Z 軸偏擺則有 AOB、COB 誤差，本論文提出的全新計算方式為假設對一向量旋轉，原無誤差之 C 軸軸線向量 \vec{k}_0 根據右手定則順時針旋轉如式 (9)，如圖二，在 C 軸有 AOC 及 BOC 誤差時，向量 \vec{k}_{error} 如式 (10)。

$$\vec{k}_0 = \begin{bmatrix} k_{x0} \\ k_{y0} \\ k_{z0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\vec{k}_{error} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(D_{bc}) \\ \sin(D_{ac}) \\ -(\cos(D_{ac}) \times \cos(D_{bc})) \end{bmatrix} \quad (10)$$

B 軸之無誤差軸線向量為 \vec{j}_0 如式 (11)，而具有 AOB 及 COB 誤差之向量 \vec{j}_{error} 如式 (12)。

$$\vec{j}_0 = \begin{bmatrix} j_{x0} \\ j_{y0} \\ j_{z0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\vec{j}_{error} = \begin{bmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(D_{cb}) \\ -(\cos(D_{ab}) \times \cos(D_{cb})) \\ -\sin(D_{ab}) \end{bmatrix} \quad (12)$$

根據羅德里格旋轉公式 [53] 可得出 C 軸偏擺誤差矩陣 $R_{\vec{k}(\theta_c)}$ 及 B 軸偏擺誤差矩陣 $R_{\vec{j}(\theta_b)}$ ，如式 (13)、(14)，其中 $c\theta = \cos(\theta)$ 、 $s\theta = \sin(\theta)$ 、 $v\theta = (1 - \cos(\theta))$ ，將 4.1.2 小節式 (6) 中 C 矩陣以及 B 矩陣代換即可得具有八

項旋轉軸位置誤差之矩陣，如式 (15)，得新 P_{error} B 軸或 C 軸在各角度具有誤差之座標， P_{error} 與 $P_{noerror}$ 相減可得於 BC 軸各角度具有旋轉中心以及旋轉軸偏擺誤差之 XYZ 誤差量，如式 (16)。

$$R_{\vec{k}(\theta_c)} = \begin{bmatrix} k_x k_x v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y k_y v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z k_z v\theta + c\theta \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$R_{\vec{j}(\theta_b)} = \begin{bmatrix} j_x j_x v\theta + c\theta & j_x j_y v\theta - j_z s\theta & j_x j_z v\theta + j_y s\theta \\ j_x j_y v\theta + j_z s\theta & j_y j_y v\theta + c\theta & j_y j_z v\theta - j_x s\theta \\ j_x j_z v\theta - j_y s\theta & j_y j_z v\theta + j_x s\theta & j_z j_z v\theta + c\theta \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$P_{error} = R_{\vec{j}(\theta_b)} \times ((R_{\vec{k}(\theta_c)} \times (P-Q) + Q) - S) + S \quad (15)$$

$$Error = \begin{bmatrix} X_e \\ Y_e \\ Z_e \end{bmatrix} = P_{error} - P_{noerror} \quad (16)$$

表一 符號說明表

符號	說明	單位
O_{xc}	C 軸安裝時，往 X 方向的偏移量 XOC	mm
O_{yc}	C 軸安裝時，往 Y 方向的偏移量 YOC	mm
O_{zc}	C 軸與 B 軸 Z 方向的距離 ZOC	mm
D_{ac}	C 軸安裝時，往 A 方向的偏擺量 AOC	deg
D_{bc}	C 軸安裝時，往 B 方向的偏擺量 BOC	deg
O_{xb}	B 軸安裝時，往 X 方向的偏移量 XOB	mm
O_{zb}	B 軸安裝時，往 Z 方向的偏移量 ZOB	mm
D_{ab}	B 軸安裝時，往 A 方向的偏擺量 AOB	deg
D_{cb}	B 軸安裝時，往 C 方向的偏擺量 COB	deg
L	刀長，光學感測頭至主軸頭距離	mm
θ_b	B 軸角度伺服命令	deg
θ_c	C 軸角度伺服命令	deg
X_o	X 軸無誤差之座標位置	mm
Y_o	Y 軸無誤差之座標位置	mm
Z_o	Z 軸無誤差之座標位置	mm
X_v	X 軸具有誤差之座標位置	mm
Y_v	Y 軸具有誤差之座標位置	mm
Z_v	Z 軸具有誤差之座標位置	mm
X_e	X 軸誤差	mm
Y_e	Y 軸誤差	mm
Z_e	Z 軸誤差	mm

二、誤差分析

(一) 多非線性方程式曲線擬合

`nlinmultifit` 函數是 MATLAB 中用於多變量非線性最小二乘問題求解的函數，它可以用於擬合各種非線性模型。主要涉及到非線性優化、最小二乘法、梯度下降法、牛頓法、阻尼牛頓法等一些數學原理。其中，最小二乘法是一種常見的回歸分析方法，通過最小化殘差平方和來確定最佳擬合曲線。梯度下降法則是一種常用的優化算法，通過不斷調整參數值來逐步降低目標函數的值。牛頓法則是一種求解非線性方程組的經典算法，它利用一階導數和二階導數來逐步逼近解，其計算原理基於高斯 - 牛頓算法和 Levenberg-Marquardt 算法，通過反覆迭代來優化非線性模型的參數，使得模型預測值和實際觀測值之間的加權殘差平方和最小化，從而實現對誤差數據的擬合。`nlinmultifit` 的求解過程分為以下幾步：

1. 首先，定義模型函數並初始化模型參數。模型函數是一個關於輸入變量和模型參數的非線性函數，輸入模型如 4.1 小節所推導，將八項旋轉軸誤差設定為模型參數，並設定初始模型參數皆為零。
2. 根據數據集，構建殘差函數。殘差函數是實際觀測值和模型預測值之間的差異，用於評估模型擬合的好壞。殘差函數通常由目標函數和模型函數構成，目標函數用於最小化殘差平方和。
3. 使用高斯 - 牛頓算法或 Levenberg-Marquardt 算法對模型參數進行優化。這兩種算法均為迭代算法，其中高斯 - 牛頓算法基於牛頓法，通過近似目標函數

的 Hessian 矩陣來加速收斂速度，但在某些情況下可能會出現不穩定的情況。而 Levenberg-Marquardt 算法則通過引入阻尼項來平衡牛頓法和梯度下降法，以實現更穩定的迭代過程。

4. 根據優化後的模型參數，計算擬合結果，並輸出擬合報告。擬合結果可以包括擬合參數、擬合函數、擬合曲線等。擬合報告包括優化狀態、收斂情況、殘差等統計信息，擬合參數即是模型推導中的八項誤差值。

(二) 擬合評估指標

觀察擬合結果的指標可以幫助我們評估模型的適用性和可靠性，以及進一步優化模型。例如，擬合度可以告訴我們模型與實際資料的適應度，如果擬合度很低，則模型可能無法準確地描述數據。而殘差則可以告訴我們模型是否存在高度的預測誤差，如果殘差分佈不均勻，則模型可能需要更複雜的形式來進行擬合。因此，觀察這些指標可以幫助我們確定模型的可靠性，並進一步改進模型。本論文將採用下列 4 項指標來評估模型的可靠性。

1. 擬合度 (Goodness of fit): 衡量模型與實際數據之間匹配程度的指標，通常用 R-squared 或 adjusted R-squared 表示，擬合度越接近 1，表示模型與數據的匹配程度越好。
2. 殘差 (Residuals): 指的是實際觀測值和模型預測值之間的差異，通常用於檢查模型是否符合擬合數據，如果殘差很大，代表模型無法很好地解釋觀察到的數

據。此外，殘差也可以用來檢查模型是否存在系統性誤差（例如過度擬合）。

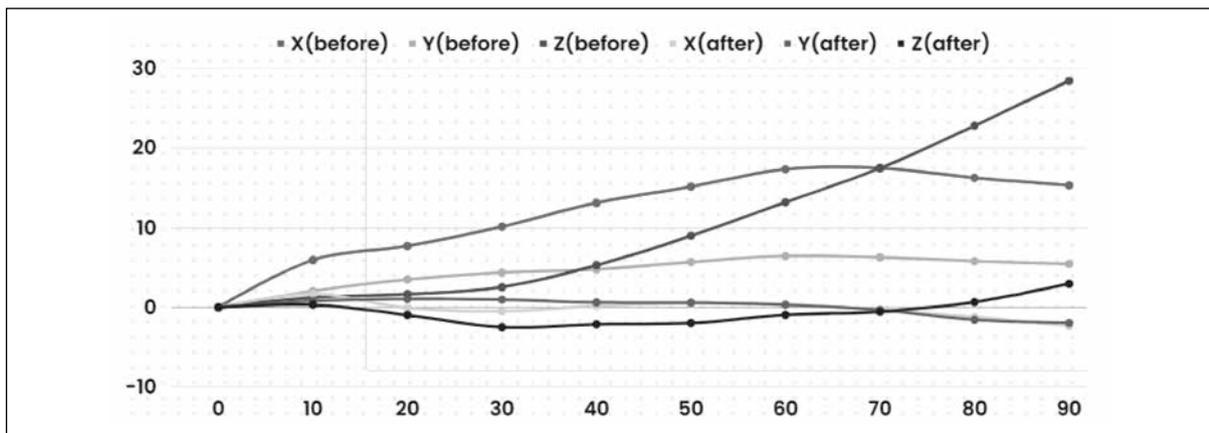
- 均方根誤差 (Root-mean-square error; RMSE): 這是一個衡量實際觀測值和模型預測值之間誤差的指標，用來評估模型的預測能力。在非線性最小二乘法中，均方根誤差可以表示觀測值與預測值之間的平均差異，數值越小表示模型的預測能力越準確。
- 置信區間 (confidence intervals): 置信區間給出了參數估計的不確定性範圍，也可以用來檢驗是否有顯著的參數。如果置信區間包含零，則說明相應的參數不顯著，反之則是顯著的。當模型的置信區

間越小，說明模型的參數估計越精確，模型的擬合效果越好。

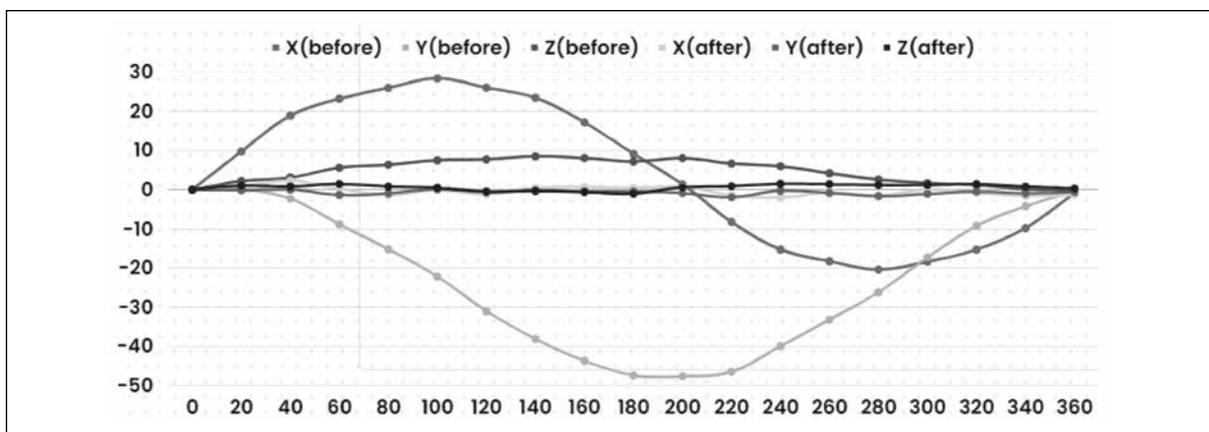
補償結果

一、補償結果

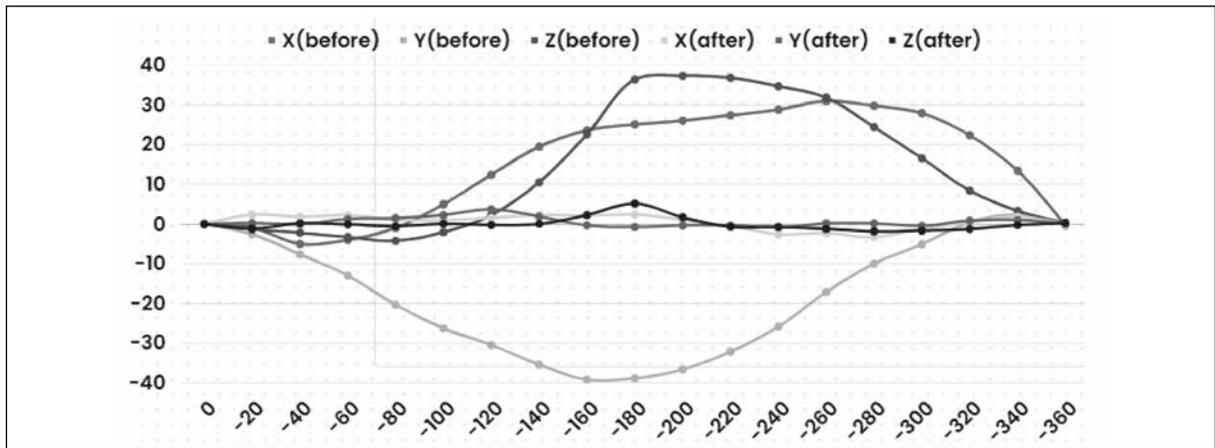
本章節將根據第二章第二小節所規劃之量測路徑來進行旋轉軸誤差量測與補償，在機台初始狀態進行量測，B 軸量測結果如圖四，C 軸量測結果如圖五，BC 軸同動量測結果如圖六，可以看到補償前 B 軸總成誤差 28 μm ，C 軸 48 μm ，BC 同動誤差 41 μm ，補償後 B 軸最大總成誤差降低至 5 μm ，C 軸降低至 4 μm ，BC 軸同動降低至 7 μm 。



圖四 K1 誤差曲線



圖五 K2 誤差曲線



圖六 K4 誤差曲線

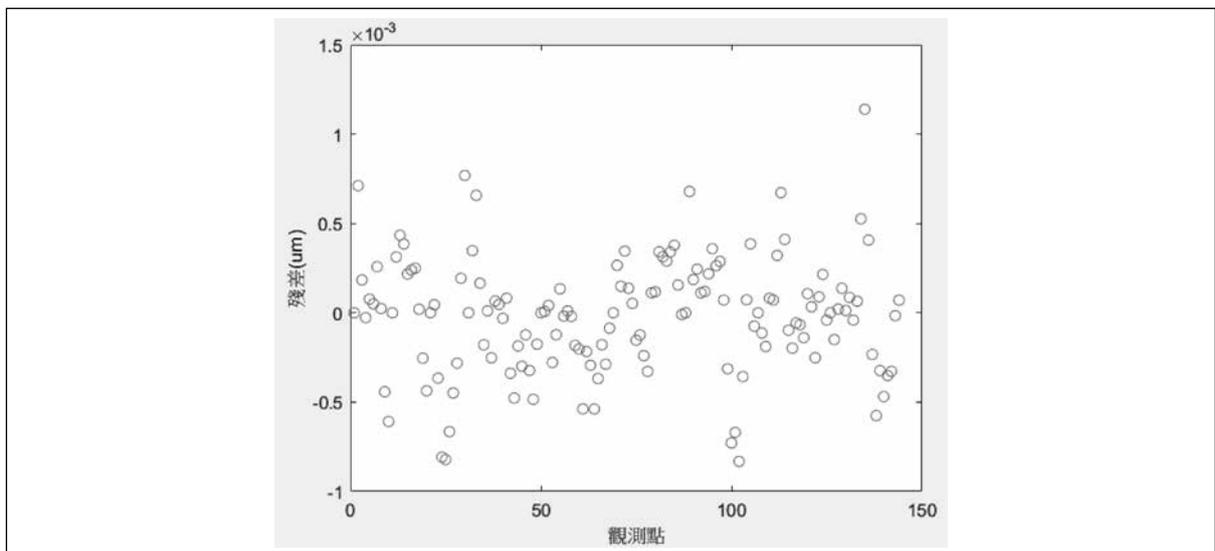
二、擬合結果

表二 顯示了考慮 K4 數據情況下的擬合度，各軸的擬合度皆有不錯的表現，均方根

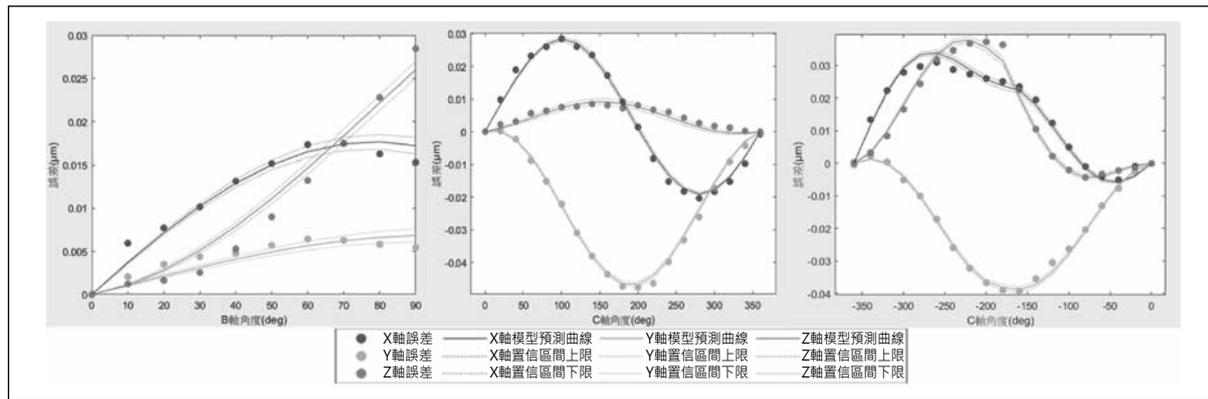
誤差都在 $1\mu\text{m}$ 左右，圖七顯示了殘差分布的情況，並無明顯趨勢且分散於零點上下，圖八顯示了擬合的情形。

表二 擬合度與均方根誤差

路徑	曲線	擬合度	均方根誤差 (RMSE)
K1	X 軸	0.9608	1.09E-03
	Y 軸	0.7759	9.26E-04
	Z 軸	0.9685	1.68E-03
K2	X 軸	0.9946	1.24E-03
	Y 軸	0.9961	1.08E-03
	Z 軸	0.8818	1.02E-03
K4	X 軸	0.9823	1.72E-03
	Y 軸	0.9953	9.96E-04
	Z 軸	0.9885	1.66E-03



圖七 殘差分布圖



圖八 誤差擬合曲線

結論與未來展望

一、結論

五軸工具機同動誤差是影響加工精度的重要因素之一，本篇論文提出了一套數學模型，以及建立了一個人機介面，可以即時模擬五軸同動誤差，並提出了一種基於非線性方程式擬合的方法進行誤差補償，有效提升五軸工具機同動精度。以下是本篇論文的結論：

1. 五軸工具機同動誤差模擬與分析系統可以即時模擬中五軸同動誤差，主要數學模型為基於羅德里個旋轉公式之座標轉換，建立計算工具機之誤差座標值，並與原座標值進行相減，來得到誤差值。實驗結果表明，本系統可以正確模擬最終 K1、K2、K4 檢測結果，模擬與實際誤差小於 $1 \mu\text{m}$ 。
2. 基於非線性方程式擬合的回歸分析方法，如最小二乘法、梯度下降法、牛頓法、阻尼牛頓法等方法對量測到的誤差值進行曲線擬合，通過量測結果有效分離出正確旋轉中心以及旋轉軸偏擺誤差之補償值，輸入於控制器中使五軸同動誤差小於 $10 \mu\text{m}$ ，降低了 80% 的誤差量，有效地提高五軸工具機的加工精度。
3. 有效地提高五軸工具機的加工精度，並且可以應用於各種類型的五軸工具機。包括一般常用之 TypeB 機型，且在量測速度以及誤差分析的準確度都優於市售儀器。

二、未來展望

1. 將該方法與其他優化算法相結合，或者於擬合過程中以剩餘的殘差中分析補償結果並加入權重進行迭代，使擬合度可以提升，進一步提高五軸工具機的加工精度。此外，還可以考慮將該方法應用於其他領域中的數據分析和誤差修正等問題。
2. 將更多的工具機誤差類型納入數學模型中，以進一步提高五軸工具機的加工精度。同時，可以探索如何將其他先進的技術應用於五軸工具機同動誤差模擬與分析系統中，例如人工智能、機器學習、Chat GPT 等技術，以提高系統的自動化程度和準確性。此外，還可以考慮如何將該方法應用於其他類型的工具機或其他領域中的數據分析和誤差修正等問題。

3. 本文所提出的方法還可以進一步優化，例如可以考慮如何減少誤差測量的時間和成本並建立一套標準量測路徑以及 SOP，以及如何提高誤差測量的精度和可靠性。此外，還可以考慮如何將該方法應用於其他類型的工具機。未來研究方向包括將該方法應用於實際生產中、優化算法相結合、減少誤差測量時間和成本、提高誤差測量精度和可靠性等。
4. 海德漢控制器中補償角度偏擺的 option，其實是需要額外付費購買的，且價錢不菲，於一些加工大廠應用上，如果每台專用機都要購買此項功能來針對誤差角度偏擺誤差做補償，其實是一筆非常大的成本，現今我們已經可以計算出具有偏擺誤差時，其刀尖點於各位旋轉角度的偏移量，或許可以透過修改 NC 加工路徑，或者其他控制器原有的功能來達到相同的補償效果。

參考文獻

一、期刊

1. Tsutsumi, M. and A. Saito, Identification and compensation of systematic deviations particular to 5-axis machining centers. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2003. 43(8): p. 771-780.
2. Józwik, J., *Experimental methods of error identification in CNC machine tool operation*. 2018: Lublin University of Technology.
3. Jiang, X. and R.J. Cripps, A method of testing position independent geometric errors in rotary axes of a five-axis machine tool using a double ball bar. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2015. 89: p. 151-158.
4. Jywe, W., T.-H. Hsu, and C.-H. Liu, Non-bar, an optical calibration system for five-axis CNC machine tools. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2012. 59: p. 16-23.
5. Schwenke, H., et al., Geometric error measurement and compensation of machines—an update. *CIRP annals*, 2008. 57(2): p. 660-675.
6. Ibaraki, S. and W. Knapp, Indirect measurement of volumetric accuracy for three-axis and five-axis machine tools: a review. *International Journal of Automation Technology*, 2012. 6(2): p. 110-124.
7. Tran, C.-S., T.-H. Hsieh, and W.-Y. Jywe, Laser R-Test for Angular Positioning Calibration and Compensation of the Five-Axis Machine Tools. *Applied Sciences*, 2021. 11(20): p. 9507.

二、規範

1. Standardization, I.O.f., ISO 230-1: 2012 Test Code for Machine Tools—Part 1: Geometric Accuracy of Machines Operating under No-Load or Quasi-Static Conditions. 2012, ISO Office Geneva.
2. 230-7, I., Test code for machine tools—part 7: geometric accuracy of axes of rotation. 2006, ISO (International Organization for Standardization) Geneva, Switzerland.
3. 230-2:, I., Test code for machine tools—part 2: determination of accuracy and repeatability of positioning numerically controlled axes. 2006, An International Standard by International Standard Organization Genève
4. 230-4, I., Test Code for Machine Tools Part 4: Circular Tests for Numerically Controlled Machine Tools. 2005, International Organisation for Standardization.
5. 10791-6, I., Test conditions for machining centres—part 6: accuracy of speeds and interpolations. ISO, 2014.

作者簡介

馮郁展 / 國立臺灣大學 機械工程學系

黃亮傑 / 國立臺灣大學 機械工程學系

覺文郁 / 國立臺灣大學 機械工程學 / 指導老師